SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 2000-2001

Sergio Polidoro

RISULTATI DI REGOLARITÀ PER LE SOLUZIONI DI UN'EQUAZIONE DI KOLMOGOROV CON UN POTENZIALE DI KATO

6 febbraio 2001

Tecnoprint - Bologna 2001

Sunto Viene studiata la regolarità interna delle soluzioni di un'equazione di Schrödinger per un operatore di evoluzione L_0 che verifica la condizione di Hörmander e viene costruita una funzione di Green relativa ad una classe di aperti "cilindrici" rispetto alla struttura di gruppo di Lie di L_0.

Abstract We study the interior regularity and a Cauchy-Dirichlet problem related to a Schrödinger type equation of the form $L_0 u + Vu = 0$, where L_0 is the Kolmogorov operator in $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$L_0 u \equiv \sum_{j=1}^{m_0} \partial^2_{x_j} u + \sum_{i,j=1}^{n} b_{i,j} x_i \partial_{x_j} u - \partial_t u,$$

(with $m_0 \leq n$ and $b_{i,j}$ real constant coefficients) and V is a measurable function belonging to a Stummel-Kato class defined below. We assume that the operator L_0 satisfies the Hörmander condition on the Lie algebra, thus it is hypoelliptic and has a fundamental solution Γ_0 that has the same basic properties as the fundamental solution of the heat equation (see [14] and its bibliography for a survey of results concerning L_0).

The interior regularity problem for Schrödinger equations has been studied for some wide and meaningful classes of operators: for the elliptic case we recall the fundamental results obtained by Stampacchia [21] in 1965, Aizeman and Simon [1] in 1982, as well as the subsequent papers by Chiarenza, Fabes and Garofalo [7], Di Fazio [9], Hinz and Kalf [12], Simader [20], Gutierrez [11], Dal Maso and Mosco [8]. The parabolic case was considered by Sturm [22] and Zhang [23] in 1994 and 1995. The results proved in the elliptic case have been extended to operators that are sum of squares of Hörmander vector fields $L_0 \equiv \sum_{j=1}^{m} X_j^2$ by Citti, Garofalo and Lanconelli [5], Citti and Di Fazio [6], and some generalizations were obtained by Biroli in [2, 3], that considered the subelliptic p-Laplace operator.

Our study belongs to that setting: indeed, as noticed before, the Kolmogorov operator L_0 is a Hörmander type operator that is not a sum of squares of vector fields and, due to the fact that its fundamental solution behaves as the one of the heat operator, we use a definition of Stummel-Kato class that extend the one introduced for parabolic equations in [22] and [23]: we say that a function $V \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ belongs to $SK(\Omega)$ if

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\sup_{(x,t)\in\Omega} \int_{t-r^2<s<t} \Gamma_0(x,t,y,s)|V(y,s)|dyds \longrightarrow 0 \\ \displaystyle\sup_{(y,s)\in\Omega} \int_{s<t<s+r^2} \Gamma_0(x,t,y,s)|V(x,t)|dxdt \longrightarrow 0 \end{array}\right. \quad \text{as} \quad r \to 0.$$

Our main results are the continuity and a uniform Harnack inequality for the non-negative solutions of $Lu = 0$ (see proposition 1.1 and theorem 1.3) and the existence of a Green function for the operator L (theorem 1.2) for a suitable class of "cylindrical" domains introduced by Montanari in [16], where the Cauchy-Dirichlet problem for classical solutions of $L_0 u = 0$ is studied.

1 Introduzione

Vengono presentati alcuni risultati ottenuti in collaborazione con la professoressa Maria Alessandra Ragusa, dell'Università di Catania. Abbiamo studiato alcune questioni relative ad un'equazione di tipo Schrödinger

$$L_0 u + Vu = 0 \tag{1.1}$$

dove L_0 è l'operatore di Kolmogorov in $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$L_0 u \equiv \operatorname{div}(ADu) + \langle x, BDu\rangle - \partial_t u \tag{1.2}$$

e V appartiene ad una classe di funzioni del tipo Stummel-Kato, che sarà definita con precisione nel seguito. Nella formula (1.2) abbiamo indicato con $A = (a_{i,j})$ e $B = (b_{i,j})$ due matrici $n \times n$ a coefficienti costanti e reali; inoltre $z = (x, t) = (x_1, ..., x_n, t)$ indica il punto di $\mathbb{R}^{n+1}$, $D = (\partial_{x_1}, ..., \partial_{x_n})$, div e $\langle \cdot , \cdot \rangle$ indicano, rispettivamente, il gradiente, la divergenza ed il prodotto interno in $\mathbb{R}^n$. Supporremo che, rispetto ad una opportuna base di $\mathbb{R}^n$ le matrici A e B si scrivano nella forma

$$A = \begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & B_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & B_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & B_r \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.3}$$

dove A_0 è la matrice identità $m_0 \times m_0$ ed ogni B_j è una matrice di dimensioni $m_{j-1} \times m_j$ e di rango m_j, con $j = 1, 2, ..., r$, $m_0 \geq m_1 \geq ... \geq m_r \geq 1$ e $m_0 + m_1 + ... + m_r = n$. Nel seguito verranno richiamati vari risultati noti per tale operatore. Qui ci limitiamo ad osservare che L_0 può essere fortemente degenere, ma l'ipotesi sulle matrici A e B assicura che esso è ipoellittico e che ha una soluzione fondamentale che presenta forti analogie con la soluzione fondamentale dell'equazione del calore.

Uno dei principali problemi considerati in questo lavoro è la validità di una disuguaglianza di Harnack invariante per le soluzioni positive di (1.1). Tale problema è stato ampiamente studiato, negli ultimi anni, per diversi tipi di operatore L_0. In un lavoro di Stampacchia del 1965 [21] vengono considerati gli operatori L_0 uniformemente ellittici e si dimostra che, se il potenziale V appartiene ad uno spazio L^p, con $p > n/2$, le soluzioni di (1.1) sono hölderiane e vale una disuguaglianza di Harnack uniforme. Come mostrato in [13], questa condizione è ottimale, nell'ambito degli spazi L^p. In un lavoro del 1982 di Aizeman e Simon [1] si dimostra tuttavia che tale condizione può essere leggermente indebolita. Viene infatti provata una disuguaglianza di Harnack nel caso in cui L_0 è l'operatore di Laplace e V appartiene alla classe di Stummel-Kato

$SK(\Omega)$ delle funzioni localmente sommabili in un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tali che

$$\lim_{r\to 0}\left(\sup_{x\in\Omega}\int_{|x-y|<r}\frac{|V(y)|}{|x-y|^{n-2}}dy\right)=0. \tag{1.4}$$

Notiamo esplicitamente che il risultato di Aizeman e Simon migliora quello di Stampacchia, in quanto $L^p(\Omega) \subset S(\Omega)$ per ogni $p > n/2$, ma $\bigcup_{p>n/2} L^p(\Omega) \neq S(\Omega)$. La prova di Aizeman e Simon si basa su tecniche probabilistiche, tuttavia in un lavoro del 1986 di Chiarenza, Fabes e Garofalo [7] la stessa disuguaglianza di Harnack viene estesa alla famiglia degli operatori uniformemente ellittici per mezzo di tecniche di analisi. Analoghi risultati sono stati successivamente ottenuti da Di Fazio [9], da Hinz e Kalf [12] e da Simader [20].

I risultati e le tecniche del lavoro [7] sono stati successivamente ripresi da vari autori e generalizzati in diverse direzioni. In un lavoro di Gutierrez [11] sono considerati operatori ellittici con una degenerazione di tipo peso, che può essere un peso A_2 di Muckenhoupt, oppure un peso del tipo

$$\omega(x) = |\det J_f(x)|^{1-2/n}, \tag{1.5}$$

dove J_f è il determinante Jacobiano di una mappa quasi-conforme $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Dal Maso e Mosco in [8] hanno considerato una classe di problemi di Dirichlet rilassati, le cui soluzioni si possono caratterizzare come γ-limiti di problemi di Dirichlet classici. In questa famiglia di problemi figura, tra gli altri, un'equazione di tipo Schrödinger, dove il potenziale V viene sostituito da una misura di Borel μ, nulla sugli insiemi di capacità zero, che verifica la condizione seguente, analoga alla (1.4):

$$\lim_{r\to 0}\left(\sup_{x\in\Omega}\int_{|x-y|<r}\frac{1}{|x-y|^{n-2}}d\mu\right)=0. \tag{1.6}$$

Più recentemente il problema della regolarità delle soluzioni di (1.1) è stato considerato per una classe di operatori uniformemente parabolici: in un lavoro di Sturm del 1994 [22], dove si suppone che i coefficienti delle derivate seconde siano continui, e in un lavoro di Zhang del 1995 [23], dove i coefficienti sono solamente misurabili. Nei due lavori appena citati viene definita una classe di Stummel-Kato "parabolica" analoga a quella caratterizzata dalla proprietà (1.4), ma individuata attraverso al soluzione

fondamentale dell'equazione del calore Γ_0: si richiede infatti che

$$\begin{aligned} &\lim_{r\to 0}\left(\sup_{(x,t)\in\Omega}\int_{t-r^2<s<t}\Gamma_0(x,t,y,s)|V(y,s)|dyds\right)=0,\\ &\lim_{r\to 0}\left(\sup_{(y,s)\in\Omega}\int_{s<t<s+r^2}\Gamma_0(x,t,y,s)|V(x,t)|dxdt\right)=0. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Un'altra notevole classe di operatori per i quali è stata studiata l'equazione di Schrödinger (1.1) è quella considerata da Hörmander, costituita dagli operatori che si possono scrivere nella forma

$$L_0 \equiv \sum_{j=1}^{m} X_j^2, \tag{1.8}$$

dove $X_0, ..., X_m$ sono campi vettoriali, definiti in un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, della forma

$$X_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(x)\partial_{x_i} \quad j = 0, ..., m$$

con i coefficienti a_{ij} di classe $C^\infty(\Omega)$, verificanti la condizione di ipoellitticità di Hörmander: "l'algebra di Lie generata dai campi $X_0, ..., X_m$ ha rango n in ogni punto di Ω". Il problema della regolarità delle soluzioni dell'equazione di Schrödinger (1.1) per l'operatore (1.8) è stato studiato in un lavoro di Citti, Garofalo e Lanconelli del 1993 [5] e, successivamente, in un lavoro di Citti e Di Fazio del 1994 [6]. La classe di Stummel-Kato viene definita in analogia con (1.4) e con (1.7) in termini della soluzione fondamentale Γ_0 dell'operatore L_0: si richiede infatti che

$$\lim_{r\to 0}\left(\sup_{x\in\Omega}\int_{\Omega_r(x)}\Gamma_0(x,y)|V(y)|dy\right)=0. \tag{1.9}$$

Qui $\Omega_r(x)$ indica l'insieme di sopralivello della soluzione fondamentale

$$\Omega_r(x) = \{y \in \Omega : \Gamma_0(x,y) > 1/r\}. \tag{1.10}$$

Anche i lavori [5] e [6] sono stati generalizzati ad altre situazioni. Lu in [15] ha considerato operatori dello stesso tipo, ma con una degenerazione di tipo peso A_2. Molto più recentemente Biroli ha studiato lo stesso problema per equazioni tipo p-laplaciano subellittico:

$$\sum_{j=1}^{m} X_j^* \left(|Xu|^{p-2}X_ju\right) + V|u|^{p-2}u = 0, \tag{1.11}$$

dove Xu indica il vettore $(X_0u, ..., X_mu)$ ed i campi X_j verificano la condizione di Hörmander (si veda [2], [3]). I lavori di Biroli si collocano nell'ambito di uno studio sistematico degli operatori del tipo (1.11) condotto da Capogna, Danielli e Garofalo, per il quale rimando a [4] ed alla relativa bibliografia. Osserviamo esplicitamente che, a differenza dei casi elencati precedentemente, l'operatore in (1.11) non è lineare, quindi non è definita la soluzione fondamentale e non si può definire la classe di Stummel-Kato mediante la formula (1.9). Per questo motivo in [2] viene utilizzata la seguente definizione che, nel caso $p = 2$ risulta equivalente alla (1.9):

$$\lim_{r\to 0}\left(\sup_{x\in\Omega}\int_0^r\left(\frac{1}{\operatorname{mis}(B(x,s))}\left(\int_{B(x,s)}|V(y)|dy\right)s^p\right)\frac{ds}{s}\right)=0 \tag{1.12}$$

(qui $B(x,s)$ è la sfera della distanza di controllo indotta dai campi $X_0, ..., X_m$, con centro in x e raggio r e $\operatorname{mis}(B(x,s))$ indica la sua misura di Lebesgue).

Il presente lavoro si colloca nell'ambito dello studio degli operatori di tipo Hörmander, non nella forma di "somma di quadrati" (1.8) considerata in [5], ma appartiene alla più generale classe

$$L_0 \equiv \sum_{j=1}^{m} X_j^2 + Y \tag{1.13}$$

dove, oltre alla somma di quadrati, figura anche un singolo campo del primo ordine. L'operatore definito in (1.2) si può infatti esprimere nella forma (1.13) se si pone

$$Y = \langle x, BD\rangle - \partial_t, \qquad X_j = \partial_{x_j}, \quad \text{per } j = 1, ..., m_0; \tag{1.14}$$

inoltre, sotto le ipotesi fatte sulle matrici A e B, i campi $X_1, ..., X_{m_0}, Y$ verificano la condizione di Hörmander. Alcuni dei risultati noti sull'operatore (1.2) (esistenza e stime della soluzione fondamentale, formule di rappresentazione delle soluzioni di $L_0u = f$, si veda [14]) sono tra gli strumenti fondamentali dei lavori [5] e [6] sugli operatori (1.8); ma la presenza della parte del primo ordine porta ad alcune differenze significative che impediscono di utilizzare le stesse tecniche. Infatti, come accade anche nel caso parabolico, non vale una stima dal basso della soluzione fondamentale analoga a quella utilizzata in [5] e, per questo motivo, faremo uso di alcune idee presenti nel lavoro di Zhang [23], che a sua volta si ispira ai lavori di Fabes e Stroock [10] relativi all'equazione parabolica omogenea $L_0u = 0$.

In questo lavoro abbiamo adottato una definizione di classe di Stummel-Kato che estende quella individuata dalla formula (1.7). Indichiamo con Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^{n+1}$ e con Γ_0 la soluzione fondamentale dell'operatore di Kolmogorov (1.2). Se

$V \in L^1(\Omega)$, poniamo

$$\eta_V(h) = \sup_{(x,t)\in\Omega} \int_{t-h^2<s<t} \Gamma_0(x,t,y,s)|V(y,s)|dyds,$$
$$\eta_V^*(h) = \sup_{(y,s)\in\Omega} \int_{s<t<s+h^2} \Gamma_0(x,t,y,s)|V(x,t)|dxdt \tag{1.15}$$

e diciamo che V appartiene alla classe di Stummel-Kato $SK(\Omega)$ relativa ad L_0 se risulta

$$\lim_{h\to 0} \eta_V(h) = 0, \quad \lim_{h\to 0} \eta_V^*(h) = 0. \tag{1.16}$$

Osservazione 1.1 *Mentre nella condizione* (1.4), *utilizzata per gli operatori ellittici, intervengono solamente i valori che la funzione* V *assume nella sfera di centro* x *e raggio* r, *nelle formule* (1.7) *e* (1.15) *intervengono anche punti "lontani" dalla singolarità di* Γ_0. *Una definizione di classe di Stummel-Kato simile a quella che abbiamo adottato può essere individuata dalle seguenti funzioni:*

$$\tilde{\eta}_V(h) = \sup_{(x,t)\in\Omega} \int_{\Omega\cap B_r(x,t)} \Gamma_0(x,t,y,s)|V(y,s)|dyds,$$
$$\tilde{\eta}_V^*(h) = \sup_{(y,s)\in\Omega} \int_{\Omega\cap B_r(y,s)} \Gamma_0(x,t,y,s)|V(x,t)|dxdt. \tag{1.17}$$

Questa diversa definizione porta tuttavia a definire la stessa classe di funzioni, in quanto risulta

$$\lim_{h\to 0} \eta_V(h) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{h\to 0} \tilde{\eta}_V(h) = 0;$$
$$\lim_{h\to 0} \eta_V^*(h) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{h\to 0} \tilde{\eta}_V^*(h) = 0.$$

Mostriamo ora una relazione tra gli spazi $SK(\Omega)$ e gli spazi di Morrey $L^{1,\lambda}$.

Osservazione 1.2 *Benché la classe* $SK(\Omega)$ *sia stata definita in analogia con quella classica* (1.4) *relativa alle equazioni ellittiche, si osservano alcune differenze sostanziali rispetto a quest'ultima.*

Nel caso di equazioni ellittiche si ha infatti

$$L^{1,\lambda}(\Omega) \subseteq SK(\Omega) \subseteq L^{1,\mu}(\Omega), \quad 0 < \mu \leq n-2 < \lambda < n,$$

(un risultato analogo vale per gli operatori somme di quadrati di campi di Hörmander, in questo caso gli spazi di Morrey si definiscono mediante la distanza di controllo relativa ai campi).

Per gli operatori di Kolmogorov è possibile dimostrare la prima inclusione

$$L^{1,\lambda}(\Omega, L_0) \subseteq SK(\Omega) \qquad N-2 < \lambda < N,$$

per la classe $SK(\Omega)$ *individuata da* (1.15), *ma non la seconda.*

2 Principali risultati

I nostri principali risultati consistono in una disuguaglianza di Harnack invariante per le soluzioni positive di (1.1) e in una stima del loro modulo di continuità. Abbiamo inoltre ottenuto alcuni risultati relativi al problema di Cauchy-Dirichlet.

Introduciamo innanzitutto alcune notazioni. Indicheremo con L l'operatore

$$L = L_0 + V \tag{2.1}$$

definito su Ω aperto limitato di $\mathbb{R}^{n+1}$, dove L_0 è l'operatore di Kolmogorov e V un elemento della classe $SK(\Omega)$. Diciamo che u è soluzione debole di $Lu = 0$ se

1. esiste $p > 1$ tale che $u, \partial_1 u, ..., \partial_{m_0} u \in L^p_{\text{loc}}(\Omega)$,
2. $Vu \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$,
3. $-\int_\Omega \langle ADu, D\varphi\rangle + \int_\Omega uY^*\varphi + \int_\Omega uV\varphi = 0$, per ogni $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

(qui e nel seguito $Y = \langle x, BD\rangle - \partial_t$, secondo la notazione introdotta in (1.14); notiamo anche che, per come è stata scelta la matrice B, si ha $Y^* = -Y$).

Osservazione 2.1 *Per l'operatore di Laplace si dimostra che, se u appartiene allo spazio $H^1_{\text{loc}}(\Omega)$, allora $Vu \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ (si veda Schechter [19]); un analogo risultato vale per gli operatori di tipo Hörmander considerati in [5], in questo caso si richiede che u appartenga allo spazio di Sobolev-Folland-Stein $S^1_{\text{loc}}(\Omega)$, costituito dalle funzioni $v \in L^2_{\text{loc}}(\Omega)$ tali che $X_j v \in L^2_{\text{loc}}(\Omega)$, per $j = 1, ..., m$.*

Per gli operatori di tipo Kolmogorov possiamo provare che, se $u \in S^2_{\text{loc}}(\Omega)$ (spazio delle funzioni v che hanno le derivate $\partial_j v, \partial^2_{i,j} v$, per $i, j = 1, ..., m_0$ ed Yv in $L^2_{\text{loc}}(\Omega)$) allora $Vu \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Ci sembra possibile provare una analoga condizione sufficiente affinché risulti $Vu \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, che richieda solamente l'appartenenza di u ad $S^1_{\text{loc}}(\Omega)$, ma tale condizione dovrebbe essere espressa in termini della derivata frazionaria $Y^{1/2}u$ e quindi, necessariamente, poco espliciti.

Ricordiamo che l'operatore L_0 è invariante rispetto ad una struttura di gruppo di Lie omogeneo che si può scrivere esplicitamente (si veda [14]): l'operazione di moltiplicazione del gruppo è definita dalla seguente espressione

$$(x, t) \cdot (\xi, \tau) = (\xi + E(\tau)x, t + \tau)$$

mentre le dilatazioni sono definite da $\big(\mathcal{D}(\lambda), \lambda^2\big)_{\lambda > 0}$, dove

$$E(t) = \exp(-tB^T), \quad \mathcal{D}(\lambda) = \text{diag}\big(\lambda I_{m_0}, \lambda^3 I_{m_1}, \ldots, \lambda^{2r+1} I_{m_r}\big) \tag{2.2}$$

e B è la matrice introdotta in (1.3). Indicheremo con d la distanza di controllo del gruppo di Lie, (si veda, ad esempio, [17]) con $B_r(z_0)$ la sfera della metrica d: $B_r(z_0) = \{z \in \mathbb{R}^{n+1}, \ d(z_0, z) < r\}$ e denoteremo con N la dimensione omogenea del gruppo, che risulta essere $N = m_0 + 3m_1 + ... + (2r + 1)m_r + 2$.

Il nostro primo risultato è contenuto nella seguente

Proposizione 2.2 *Sia u soluzione debole di $Lu = 0$ in Ω, con $V \in SK(\Omega)$. Allora u è continua ed esiste una costante positiva C, che dipende solamente da L_0, tale che*

$$|u(z) - u(z_0)| \leq (Cd(z, z_0)^{1/2} + 2\eta_V(5d(z, z_0)^{1/2}) \sup_{B_{4r}(z_0)} |u|$$

per ogni $z_0 \in \Omega$, $r \in]0, 1[$ tali che $B_{4r}(z_0) \subset \Omega$ e per ogni $z \in B_{r^2}(z_0)$.

Se inoltre $V \in L^{1,\lambda}(\Omega, L_0)$ con $\lambda \in]N-2, N[$ (si veda la definizione precisa dello spazio di Morrey nel prossimo paragrafo) allora

$$|u(z) - u(z_0)| \leq C \sup_{B_{4r}(z_0)} |u| \cdot \|V\|_{L^{1,\lambda}(\Omega)} d(z, z_0)^{\alpha},$$

dove $\alpha = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\lambda - N + 2}{2}\right\}$.

Il successivo risultato riguarda il problema di Cauchy-Dirichlet e richiede l'introduzione di ulteriori notazioni e richiami.

Riportiamo ora la definizione di "aperto cilindrico" introdotta da Montanari in [16] per lo studio del problema di Cauchy-Dirichlet relativo all'operatore L_0. Siano (ξ, τ) un punto di $\mathbb{R}^{n+1}$, $R, h > 0$ fissati. Per ogni $X \in \mathbb{R}^n$ indichiamo con $|X|$ la norma euclidea di X. Poniamo allora

$$Q_R(\xi, \tau, h) = \left\{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} : \tau < t < \tau + h; \left|\mathcal{D}\left(\frac{1}{R}\right)(E(-t)x - E(-\tau)\xi)\right| < 1\right\},$$

$$S_R(\xi, \tau) = \left\{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} : t = \tau; \left|\mathcal{D}\left(\frac{1}{R}\right)E(-\tau)(x - \xi)\right| < 1\right\},$$

$$S_R(\xi, \tau, h) = \left\{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \quad t = \tau + h; \left|\mathcal{D}\left(\frac{1}{R}\right)(E(-t)x - E(-\tau)\xi)\right| < 1\right\},$$

$$M_R(\xi, \tau, h) = \left\{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \quad \tau < t < \tau + h; \left|\mathcal{D}\left(\frac{1}{R}\right)(E(-t)x - E(-\tau)\xi)\right| = 1\right\},$$

che indicano rispettivamente, l'aperto, la sua base, una sua sezione all'altezza $t = \tau + h$ ed il suo "mantello laterale".

Osserviamo esplicitamente che, nel caso degli operatori parabolici classici ($A = I_n$ e $B = 0$), risulta $E(t) = I_n, \mathcal{D}(\lambda) = \lambda I_n$ e quindi l'aperto $Q_R(\xi, \tau, h)$ non è altro che il cilindro $S_R \times]\tau, \tau + h[$, la cui base è la sfera euclidea di $\mathbb{R}^n$ di centro ξ e raggio R. In questo caso ritroviamo i risultati di Zhang [23].

Diciamo che u è soluzione del problema di Cauchy-Dirichlet

$$\begin{cases} Lu = 0 & \text{in } Q_R(\xi, \tau, h) \\ u = 0 & \text{in } M_R(\xi, \tau, h) \\ u = f & \text{in } S_R(\xi, \tau) \end{cases} \tag{2.3}$$

con $f \in C_0(S_R(\xi, \tau))$, se

1. u è soluzione debole di $Lu = 0$ in $Q_R(\xi, \tau, h)$,

2. $\lim_{(x,t)\to(y,s)} u(x,t) = 0$ per ogni $(y,s) \in M_R(\xi,\tau,h)$,

3. $\lim_{(x,t)\to(y,\tau)} u(x,t) = f(y,\tau)$ per ogni $(y,\tau) \in S_R(\xi,\tau)$.

Diciamo che G è funzione di Green per Q_R se, per ogni $f \in C_0(S_R)$, la funzione

$$u(x,t) = \int_{S_R(\xi,\tau)} G(x,t,y,\tau) f(y,\tau) dy$$

è soluzione del problema di Cauchy-Dirichlet (2.3).

Osserviamo che, mentre in [16] si considerino soluzioni classiche di $L_0 u = 0$, qui studiamo il problema per soluzioni in senso debole di $Lu = 0$. La proposizione 2.2 indica che è ragionevole richiedere che il dato al bordo venga assunto per continuità. Il seguente risultato assicura che il problema di Cauchy-Dirichlet (2.3) è ben posto.

Teorema 2.3 *Se $V \in SK(Q_R(\xi,\tau,h))$, allora esiste la funzione di Green relativa al problema (2.3). Tale funzione, che indicheremo con G, appartiene ad $L^p(\Omega_R(\xi,\tau,h))$ per ogni $p \in \left[1, \frac{N}{N-2}\right[$ ed esistono due costanti positive c_p, c_p^*, che dipendono solamente da V, tali che*

$$\|G(\cdot,w)\|_{L^p} \le c_p, \quad \|G(z,\cdot)\|_{L^p} \le c^*{}_p.$$

Inoltre, per ogni $p \in \left[1, \frac{N}{N-1}\right[$ esistono due costanti positive $\tilde{c}_p, \tilde{c}_p^*$, che dipendono solamente da V, tali che $\frac{\partial G}{\partial x_j}, \frac{\partial G}{\partial y_j} \in L^p(\Omega_R(\xi,\tau,h))$, per $j = 1, ..., m_0$, e

$$\left\| \frac{\partial G}{\partial x_j}(\cdot,w) \right\|_{L^p} \le \tilde{c}_p, \quad \left\| \frac{\partial G}{\partial y_j}(z,\cdot) \right\|_{L^p} \le \tilde{c}_p^*.$$

Risulta inoltre che la soluzione del problema (2.3) è unica.

Per enunciare il nostro ultimo risultato, introduciamo due ulteriori notazioni: consideriamo il cilindro $Q_R(\xi,\tau,R^2)$ e, per ogni $\alpha,\beta,\gamma,\delta \in]0,1[$: $\alpha < \beta < \gamma$, poniamo

$$Q^- = \{(x,t) \in Q_{\delta R}(\xi,\tau,R^2) : \tau + \alpha R^2 \le t \le \tau + \beta R^2\},$$
$$Q^+ = \{(x,t) \in Q_{\delta R}(\xi,\tau,R^2) : \tau + \gamma R^2 \le t\}.$$

Teorema 2.4 *(Harnack)*. *Sia $u \ge 0$, soluzione debole di $Lu = 0$ in $Q_R(\xi,\tau,R^2)$, con $V \in SK(Q_R(\xi,\tau,R^2))$. Allora esiste $M > 0$, che dipende da V e dalle costanti $\alpha,\beta,\gamma,\delta$, tale che*

$$\max_{Q^-} u \le M \min_{Q^+} u.$$

Concludiamo questo paragrafo osservando che, a differenza di quanto sembra risultare nel lavoro di Zhang [23], la proposizione 2.2 ed il teorema 2.4 si possono dimostrare senza fare ricorso alla funzione di Green costruita nel teorema 2.3, purché si supponga che la soluzione u sia limitata. La funzione di Green viene comunque utilizzata al fine di rimuovere l'ipotesi di limitatezza della soluzione.

3 Funzione di Green

Costruiremo la funzione di Green $G = G(\xi, \tau, h)$ relativa all'aperto $Q_R(\xi, \tau, h)$ e all'operatore L, a partire dalla funzione di Green G_0 per L_0 trovata da Montanari in [16]:

Proposizione 4.1 (Montanari, [16]) *Per ogni $(\xi, \tau) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $R > 0$, $h > 0$, esiste la funzione di Green G_0 relativa all'operatore L_0 ed all'aperto $Q_R(\xi, \tau, h)$. Inoltre, per ogni $\delta, \gamma \in]0, 1[$ esiste $\varepsilon = \varepsilon(\delta, \gamma, h) > 0$ tale che*

$$G_0(x, t, y, \tau) \geq \frac{\varepsilon}{\operatorname{mis}(S_R(\xi, \tau))}$$

per ogni $y \in S_{\delta R}(\xi, \tau)$ e per ogni $(x, t) \in Q_{\delta R}(\xi, \tau, h)$, con $t \geq \tau + \gamma h$.

Osservazione 4.2 *La funzione G_0 costruita in [16] verifica anche la disuguaglianza*

$$G_0(x, t, y, s) \leq \Gamma_0(x, t, y, s);$$

osserviamo esplicitamente che, di conseguenza, $\varepsilon < 1$ in quanto

$$1 = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_0(x, t, y, \tau) dy > \int_{S_R(\xi, \tau)} \Gamma_0(x, t, y, \tau) dy \geq \int_{S_R(\xi, \tau)} G_0(x, t, y, \tau) dy \geq \varepsilon.$$

Costruiremo la funzione di Green $G = G(\xi, \tau, h)$ utilizzando il metodo della parametrice. Cercheremo quindi G nella forma

$$G(z, w) = G_0(z, w) + \int_{Q_R} G_0(z, \eta) V(\eta) \Phi(\eta, w) d\eta$$

con Φ funzione incognita. Ragionando in maniera formale, richiediamo che risulti $LG(z, \zeta) = -\delta_\zeta$ (delta di Dirac concentrata in ζ),

$$\begin{aligned} -\delta_\zeta = & LG_0(z, \zeta) + \int_{Q_R} LG_0(z, \eta) V(\eta) \Phi(\eta, \zeta) d\eta = \\ & -\delta_\zeta + V(z) G_0(z, \zeta) - V(z) \Phi(z, \zeta) + \int_{Q_R} V(z) G_0(z, \eta) V(\eta) \Phi(\eta, \zeta) d\eta; \end{aligned}$$

di conseguenza dobbiamo cercare Φ come soluzione di

$$\Phi(z, \zeta) = G_0(z, \zeta) + \int_{Q_R} G_0(z, \eta) V(\eta) \Phi(\eta, \zeta) d\eta.$$

Il metodo delle approssimazioni successive ci porta quindi a cercare G nella forma seguente

$$G(z, w) = G_0(z, w) + \sum_{k=1}^{\infty} J_k(z, w), \tag{4.1}$$

dove

$$\begin{aligned} J_1(z,w) &= \int_{Q_R(\xi,\tau,h)} G_0(z,\eta)V(\eta)G_0(\eta,w)d\eta \\ J_{k+1}(z,w) &= \int_{Q_R(\xi,\tau,h)} G_0(z,\eta)V(\eta)J_k(\eta,w)d\eta. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Verifichiamo innanzitutto che gli integrali J_k sopra introdotti sono ben definiti; proveremo poi che la serie (4.1) converge in L^p e che G è funzione di Green per L.

Lemma 4.3 *Le funzioni J_k definite in (4.2) sono elementi di $L^p(Q_R(\xi,\tau,h))$ per ogni $p \in [1, \frac{N}{N-2}[$ ed esistono due costanti positive c_p, c_p^* tali che, per ogni $w, z \in Q_R(\xi,\tau,h)$ risulta*

$$\|J_k(z,\cdot), L^p(Q_R(\xi,\tau,h))\| \leq c_p\eta_V^k(h), \quad \|J_k(\cdot,w), L^p(Q_R(\xi,\tau,h))\| \leq c_p^*\eta_V^{*k}(h). \tag{4.3}$$

Inoltre $J_k(x,t,y,s) = 0$ per ogni $t \leq s$ e J_{k+1} si esprime anche nella forma

$$J_{k+1}(z,w) = \int_{Q_R(\xi,\tau,h)} J_k(z,\eta)V(\eta)G_0(\eta,\xi)d\eta. \tag{4.4}$$

Come conseguenza del lemma, possiamo dimostrare:

Proposizione 4.4 *Sia $h > 0$ tale che $\eta_V(h) < 1$ e $\eta_V^*(h) < 1$. Risulta allora:*

i) per ogni $p \in [1, \frac{N}{N-2}[$ la serie

$$G(z,\zeta) = G_0(z,\zeta) + \sum_{k=1}^{\infty} J_k(z,\zeta).$$

introdotta in (4.1) converge in $L^p(Q_R(\xi,\tau,h))$;

ii) $G(x,t,y,s) = 0$ per $t \leq s$;

iii) per ogni $p \in [1, \frac{N}{N-1}[$ e per ogni $j = 1,\ldots,m_0$ sono definite le funzioni $\frac{\partial G}{\partial x_j}$ e $\frac{\partial G}{\partial y_j}$ come elementi dello spazio $L^p(Q_R(\xi,\tau,h))$

iv) esistono due costanti positive c, c^* tali che, per ogni $(x,t) \in Q_R(\xi,\tau,h)$,

$$\int_{S_R(\xi,\tau)} |G(x,t,y,\tau)|dy \leq c; \qquad \int_{S_R(\xi,\tau,h)} |G(y,\tau+h,x,t)|dy \leq c^*.$$

v) per ogni $z \in Q_R(\xi, \tau, h)$ *si ha*

$$\int_{Q_R(\xi,\tau,h)} |G(z,w)V(w)|\,dw \leq \sum_{k=1}^{\infty} \eta_V(h)^k, \qquad \int_{Q_R(\xi,\tau,h)} |V(\zeta)G(\zeta,z)|\,d\zeta \leq \sum_{k=1}^{\infty} \eta_V^*(h)^k.$$

Osservazione 4.5 *La funzione G definita in* (4.1) *è soluzione, nel senso delle distribuzioni, di* $LG(z,\zeta) = -\delta_\zeta$, $L^*G(z,\zeta) = -\delta_z$, *ossia:* $G, \partial_{x_j}G \in L^p(Q_R(\xi,\tau,h))$, *per un opportuno* $p > 1$ *e per* $j = 1, ..., m_0, GV \in L^1(Q_R(\xi,\tau,h))$ *e, per ogni* $\varphi \in C_0^\infty(Q_R(\xi,\tau,h))$, *si ha:*

$$\int_{Q_R(\xi,\tau,h)} (\langle AD_zG(z,\zeta), D\varphi(z)\rangle - G(z,\zeta)Y^*\varphi(z) - G(z,\zeta)V(z)\varphi(z))\,dz = \varphi(\zeta)$$

$$\int_{Q_R(\xi,\tau,h)} (\langle AD_\zeta G(z,\zeta), D\varphi(\zeta)\rangle - G(z,\zeta)Y\varphi(\zeta) - G(z,\zeta)V(\zeta)\varphi(\zeta))\,d\zeta = \varphi(z).$$

Come conseguenza della precedente osservazione, si verifica direttamente che la funzione G definita in (4.1) è una funzione di Green per il problema (2.3). Inoltre, se $g \in C_0(S(\xi,\tau,h))$, la funzione

$$v(y,s) = \int_{S(\xi,\tau,h)} G(x,t+h,y,s)g(x,t+h)dx$$

è soluzione del problema

$$\begin{cases} L^*v = 0 & \text{in } Q_R(\xi,\tau,h) \\ v = 0 & \text{in } M_R(\xi,\tau,h) \\ v = g & \text{in } S_R(\xi,\tau,h). \end{cases} \tag{4.5}$$

5 Prova dei risultati principali

Osserviamo innanzitutto che, se v è una soluzione debole dell'equazione $L_0v = f$, è nulla fuori da un compatto ed $f \in L^1(\mathbb{R}^{n+1})$, allora

$$v(z) = -\int_{\mathbb{R}^{n+1}} \Gamma_0(z,\zeta)f(\zeta)d\zeta \tag{6.1}$$

per ogni $z \in \mathbb{R}^{n+1}$. La validità della formula sopra scritta segue da un classico argomento di densità nel quale, a causa del fatto che la funzione f è solamente sommabile, si deve utilizzare la continuità di tipo debole $\left(1, \frac{N}{N-2}\right)$ dell'applicazione $f \mapsto$

$\int \Gamma_0(\cdot,\zeta)f(\zeta)d\zeta$. Questo fatto permette di provare il risultato enunciato nella proposizione 2.2, assumendo che la soluzione u dell'equazione $Lu = 0$ sia una funzione *limitata*.

Diamo ora un risultato di unicità per il Problema di Cauchy-Dirichlet (2.3).

Proposizione 6.1 *Se u è soluzione limitata del problema*

$$\begin{cases} Lu = 0 & in\ Q_R(\xi,\tau,h) \\ u = 0 & in\ M_R(\xi,\tau,h) \\ u = 0 & in\ S_R(\xi,\tau) \end{cases} \tag{6.2}$$

allora $u \equiv 0$.

DIMOSTRAZIONE Utilizzando il principio del confronto si verifica che, se u è soluzione del problema

$$\begin{cases} Lu = f & \text{in } Q_R(\xi,\tau,h) \\ u = 0 & \text{in } M_R(\xi,\tau,h) \\ u = g & \text{in } S_R(\xi,\tau) \end{cases}$$

con $f \in L^1(Q_R(\xi,\tau,h))$ e $g \in C_0(S_R(\xi,\tau))$, allora u coincide con

$$v(z) = \int\limits_{S_R(\xi,\tau)} G_0(z,y,\tau)g(y)dy + \int\limits_{Q_R(\xi,\tau,h)} G_0(z,\eta)(V(\eta)u(\eta) - f(\eta))d\eta. \tag{6.3}$$

Di conseguenza, se u è soluzione del problema (6.2), allora dalla (6.3) segue che, per ogni $(x,t) \in Q_R(\xi,\tau,h)$,

$$u(x,t) = \int\limits_{Q_R(\xi,\tau,h)} G_0(x,t,y,s)V(y,s)u(y,s)dyds.$$

Poiché $G_0(x,t,y,s) = 0$ per $s \leq t$, si ha che, se $s < \tau + \delta$,

$$||u||_{L^\infty(Q_R(\xi,\tau,\delta))} \leq ||u||_{L^\infty(Q_R(\xi,\tau,\delta))} \int\limits_{Q_R(\xi,\tau,\delta)} G_0(z,\eta)|V(\eta)|d\eta \leq \eta_V(\delta)||u||_{L^\infty(Q_R(\xi,\tau,\delta))},$$

quindi, se scegliamo $\delta > 0$ tale che $\eta_V(\delta) < 1$, si ha $u \equiv 0$ in $Q_R(\xi,\tau,\delta)$. Iterando il procedimento resta provato l' asserto.

Proviamo ora un risultato che ci consente di rimuovere l'ipotesi di limitatezza dagli enunciati precedenti.

Lemma 6.2 *Sia u soluzione di $Lu = 0$ in Ω. Allora u è limite in $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ di una successione $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ di funzioni equicontinue.*

DIMOSTRAZIONE Poniamo per ogni $m \in \mathbb{N}$

$$V_m(x,t) = \begin{cases} -m & \text{se } V(x,t) \leq -m \\ V(x,t) & \text{se } -m < V(x,t) < m, \\ m & \text{se } V(x,t) \geq m \end{cases}$$

ed osserviamo che $V_m \in SK(\Omega)$ ed $\eta_{V_m}(h) \leq \eta_V(h)$, $\eta^*_{V_m}(h) \leq \eta^*_V(h)$, per ogni $h > 0$. Scegliamo un aperto cilindrico $Q_R(\xi,\tau,h) \subset\subset \Omega$, con h tale che $\eta_V(h) < 1$ ed $\eta^*_V(h) < 1$ ed una funzione $\varphi \in C_0^\infty(Q_R(\xi,\tau,h))$, tale che $\varphi \equiv 1$ in un compatto $K \subset Q_R(\xi,\tau,h)$. Posto $L_m = L_0 + V_m$ si ha

$$L_m(u\varphi) = 2\langle ADu, D\varphi\rangle + uL_0\varphi + (V_m - V)u\varphi.$$

Per brevità di notazione, indicheremo $Q_R = Q_R(\xi,\tau,h)$ ed $f = 2\langle ADu, D\varphi\rangle + uL_0\varphi$.

Indichiamo poi con G_m la funzione di Green dell'operatore L_m sopra definito (costruita nel paragrafo 4) e poniamo

$$u_m(z) = -\int_{Q_R} G_m(z,\zeta) f(\zeta) d\zeta.$$

Risulta allora

$$\begin{cases} L_m(u_m - \varphi u) = -(V_m - V)\varphi u & \text{in } Q_R \\ u_m - \varphi u = 0 & \text{in } \partial Q_R. \end{cases}$$

Il secondo membro dell' equazione differenziale è un elemento di $L^1(Q_R)$, per il principio del confronto (le funzioni V_m sono limitate) si ha allora:

$$(u_m - \varphi u)(z) = \int_{Q_R} G_m(z,\zeta)(V_m - V)\varphi u(\zeta) d\zeta.$$

Integriamo ora entrambi i membri su Q_R: per la proposizione 4.4 si ha:

$$\|u_m - \varphi u\|_{L^1(Q_R)} = \int_{Q_R}\left(\int_{Q_R} |G_m(z,\zeta)||(V_m - V)\varphi u| d\zeta\right) dz \leq c\|(V_m - V)\varphi u\|_{L^1(Q_R)},$$

dove, ricordiamo, la costante c è

$$c = \sup_{\eta \in Q_R} \|\Gamma_0(\eta,\cdot)\|_{L^1(Q_R)} \sum_{k=0}^{\infty} \eta^k_V(h)$$

e dipende solamente da V. Poiché infine

$$|V_m(\xi) - V(\xi)| \cdot |\varphi(\xi)u(\xi)| \leq |\varphi(\xi)V(\xi)u(\xi)|,$$

si trova che

$$\lim_{m\to\infty} \|u_m - \varphi u\|_{L^1(Q_R)} = 0.$$

Osserviamo ora che, essendo le funzioni V_m limitate, ogni u_m è continua e risulta

$$L_m u_m = 0, \quad \text{in } K.$$

Per quanto osservato all'inizio del paragrafo, la successione (u_m) è equicontinua in K e questo conclude la dimostrazione del lemma.

Possiamo ora completare la prova dei nostri principali risultati. Infatti, come conseguenza del lemma, ogni soluzione di $Lu = 0$ è continua e la prova della proposizione 2.2 si ottiene come indicato all'inizio del paragrafo.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 2.3 Consideriamo un generico aperto cilindrico $Q_R(\xi_0, \tau_0, T) \subset \Omega$. Sia $(y, s) \in Q_R(\xi_0, \tau_0, T)$, scegliamo $h > 0$ tale che $\eta_V(h) < 1$ ed $\eta_V^*(h) < 1$ ed indichiamo con $G^{(s)}(x, t, y, s)$ la funzione di Green costruita nella proposizione 4.4 per l'aperto $Q_R(\xi, s, h)$, dove abbiamo posto $\xi = E(s - \tau_0)\xi_0$ (in questo modo risulta $Q_R(\xi, s, h) = \{(x, t) \in Q_R(\xi_0, \tau_0, T) : s < t < s + h\}$).

Se ora $t \leq s$ poniamo $G(x, t, y, s) = 0$, mentre se $(x, t) \in Q_R(\xi, s, h)$, poniamo $G(x, t, y, s) = G^{(s)}(x, t, y, s)$. Se invece $(x, t) \in Q_R(\xi_0, \tau_0, T)$, con $s + h < t \leq s + 2h$, definiamo

$$G(x, t, y, s) = \int_{S_R(\xi, s, h)} G^{(s+h)}(x, t, w, s + h) G^{(s)}(w, s + h, y, s) dw.$$

Osserviamo esplicitamente che la funzione è ben definita, in quanto $G^{(s)}(\cdot, s + h, y, s)$ è continua su $S_R(\xi, s, h)$ e nulla sul suo bordo laterale. Procedendo in questo modo riusciamo a definire la funzione di Green G per ogni $(x, t) \in Q_R(\xi_0, \tau_0, T)$.

Il risultato di unicità segue direttamente dal lemma 6.2 e dalla proposizione 6.1.

La prova del teorema 2.4 si basa sulla tecnica introdotta da Fabes e Stroock per le equazioni uniformemente paraboliche e richiede essenzialmente due modifiche: la prima consiste nell'adattamento alla geometria non euclidea del gruppo di Lie relativo all'operatore L_0 ed è stata effettuata da Montanari in [16], la seconda è dovuta alla presenza del potenziale V ed è stata effettuata da Zhang in [23] per il caso parabolico. Nel nostro caso è stato sufficiente combinare le due tecniche, pertanto non riportiamo la prova del risultato.

Bibliografia

[1] M. AIZENMAN, B. SIMON, *Brownian motion and Harnack's inequality for Schrödinger equations*, Comm. Pure Appl. Math. **35** (1982), 209–271.

[2] M. BIROLI, *Nonlinear Kato measures and nonlinear Schrödinger problems*, Rend. Acc. Naz. Sc. detta dei XL, Memorie di Matematica e Appl. **21,1** (1997), 235–252.

[3] M. Biroli, *Schrödinger type and relaxed Dirichlet problems for the subelliptic p-Laplacian* (preprint).

[4] L. Capogna, D. Danielli, N. Garofalo, *An embedding theorem and the Harnack inequality for nonlinear subelliptic equations*, Comm. in P.D.E. **18** (1993), 1765–1794.

[5] G. Citti, N. Garofalo, E. Lanconelli, *Harnack's inequality for sum of squares of vector fields*, Amer. J. of Math. **115, 3** (1993), 699–734.

[6] G. Citti, G. Di Fazio, *Hölder-continuity of the solutions for operators which are a sum of squares of vector fields plus a potential*, Proc. Amer. Math. Soc. **112, 3** (1994), 741–750.

[7] F. Chiarenza, E. Fabes, N. Garofalo, *Harnack's inequality for Schrödinger operators and the continuity of solutions*, Proc. Amer. Math. Soc. **307** (1986), 415–425.

[8] G. Dal Maso, U. Mosco, *Wiener criteria and energy decay for relaxed Dirichlet problems*, Arch. Rat. Mech. An. **95** (1986), 345–387.

[9] G. Di Fazio, *Hölder-continuity of solutions for some Schrödinger equations*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **79** (1988), 173–183.

[10] E. B. Fabes, D. W. Stroock, *A new proof of Moser's parabolic Harnack inequality using the old idea of Nash*, Arch. Rat. Mech. An. **96** (1986), 327–338.

[11] C. E. Gutierrez, *Harnack's inequality for degenerate Schrödinger operators*, Trans Amer. Math. Soc. **312, 1** (1989), 403–419.

[12] A. Hinz, H. Kalf, *Subsolutions estimates and Harnack's inequality for Schrödinger operator*, J. Reine Angew. Math. **404** (1990), 118–134.

[13] O. A. Ladyženskaja, N. N. Ural'ceva, *Linear and quasilinear elliptic equations*, Academic Press, New York, 1968.

[14] E. Lanconelli, S. Polidoro, *On a class of hypoelliptic evolution operators*, Rend. Sem. Mat. Pol. Torino **51.4** (1993), 137–171.

[15] G. Lu, *On Harnack's inequality for a class of strongly degenerate Schrödinger operators formed by vector fields*, Diff. Integral Eqs. **7,1** (1994), 73–100.

[16] A. Montanari, *Harnack inequality for totally degenerate Kolmogorov-Fokker-Planck operators*, Boll. Un. Mat. Ital. (7) **10**-B (1996), 903–926.

[17] A. NAGEL, E. M. STEIN, S. WAINGER, *Balls and metrics defined by vector fields I: basic properties*, Acta Math. **155** (1985), 103–147.

[18] S. POLIDORO, *On a class of ultraparabolic operators of Kolmogorov-Fokker-Planck type*, Le Matematiche **49** (1994), 53–105.

[19] M. SCHECHTER, *Spectra of Partial Differential Operators*, Amsterdam, 1971.

[20] C. G. SIMADER, *An elementary proof of Harnack's inequality for Schrödinger operators and related topics*, Math. Z. **203** (1990), 129–152.

[21] G. STAMPACCHIA, *Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques au second ordre à coefficients discontinus*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **15** (1965), 189–256.

[22] K. T. STURM, *Harnack's inequality for parabolic operators with singular low order terms*, Math. Z. **216** (1994), 593-612.

[23] Q. ZHANG, *On a parabolic equation with a singular lower order term*, Trans Amer. Math. Soc. **348,7** (1996), 2811–2844.